МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКАЯ ОРДЕНА «ЗНАК ПОЧЕТА» ГОСУДАРСТВЕННАЯ
АКАДЕМИЯ ВЕТЕРИНАРНОЙ МЕДИЦИНЫ»

А. Н. Толкач

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания
для студентов 1 курса БТФ по специальности
«Производство продукции животного происхождения»

Витебск
ВГАВМ
2025

УДК 51
ББК 22.1
Т52

Рекомендовано к изданию методической комиссией биотехнологического факультета УО «Витебская ордена «Знак Почета» государственная академия ветеринарной медицины» от 31 октября 2024 г. (протокол № 1)

Авторы:
старший преподаватель *А. Н. Толкач*

Рецензенты:
кандидат ветеринарных наук, доцент *В. Н. Иванов*;
кандидат ветеринарных наук, доцент *В. А. Патафеев*

Толкач, А. Н.

Т52 Высшая математика. Сборник задач по высшей математике : методические указания для студентов 1 курса БТФ по специальности «Производство продукции животного происхождения» / А. Н. Толкач. – Витебск : ВГАВМ, 2025. – 36 с. – ISBN 978-985-591-221-8.

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой для специальности 6-05-0811-02 «Производство продукции животного происхождения». Предназначены для проведения практических занятий, закрепления изученного теоретического материала и способствуют комплексному процессу интегрирования курса высшей математики в учебный процесс.

В методические указания включены задачи разного уровня сложности. Задачи сгруппированы по разделам и темам. Каждая тема содержит информацию об основных законах и формулах. В конце содержится справочный материал, который используется в учебном процессе.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-985-591-221-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания предназначены для использования в практическом цикле, при изучении высшей математики студентами биотехнологического факультета.

Дисциплина «Высшая математика» составляет основу теоретической подготовки технологов производства продукции животного происхождения.

Знания по высшей математике необходимы студентам в их профессиональной деятельности. Представленные в методических указаниях разделы и вопросы высшей математики имеют тесную связь с другими дисциплинами, такими как кормление сельскохозяйственных животных, механизация животноводства с основами энергосбережения, формирующими профиль работы специалистов агропромышленного комплекса.

Изучение учебной дисциплины «Высшая математика» играет важную роль в теоретической подготовке технологов производства продукции животного происхождения.

Цель данных методических указаний - формировать у студентов материалистическое мировоззрение о природе в целом, вооружить теоретическими и практическими знаниями, необходимыми для эффективной работы по приобретаемой специальности. Научить студентов использовать математику как метод мышления, как язык, как средство формулирования и организации понятий, выработать необходимые умения и навыки применения полученных теоретических знаний для решения практических и прикладных задач. Данные методические указания помогут студентам овладеть методами решения математических задач по основным разделам высшей математики, а также основными методами статистической обработки данных.

В рамках образовательного процесса по данной учебной дисциплине студент должен приобрести не только теоретические и практические знания, умения и навыки по специальности, но и развить свой ценностно-личностный, духовный потенциал, сформировать качества патриота и гражданина, готового к активному участию в экономической, производственной, социально-культурной и общественной жизни страны.

Сборник задач будет полезен при проведении практических занятий по курсу высшей математики, так как умение решать задачи определяет уровень усвоения материала и необходим для развития аналитического мышления.

I. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Функция одной переменной

1.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Под величиной в математике понимают все то, что может быть измерено, при этом физическая сущность величин не учитывается.

Постоянной величиной называется величина в условиях данной задачи, сохраняющая одно и то же значение. Постоянные величины обозначаются либо цифрами, либо начальными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, …

Переменной величиной называется величина в условиях данной задачи, принимающая различные числовые значения. Переменные величины обозначаются, как правило, последними буквами латинского алфавита: x, y, z.

Определение: Правило f, ставящее всякому числу x из некоторого множества X единственное число y из некоторого множества Y, называется **числовой функцией**. При этом x называют **независимой переменной** (или **аргументом**), а y – **зависимой переменной** (или **функцией**).

Функция обозначается $y = f(x)$

Определения:

1. Множество всех значений независимой переменной x, для которых функция определена (то есть может быть посчитана), называется **областью определения функции**. Обозначается $D(f)$.

2. Множество всех значений зависимой переменной y, которые она принимает, называется **областью значений функции**. Обозначается $E(f)$.

Четность и нечетность функции:

Функция $f(x)$ является четной, если для любого положительного x из ее области определения значение $-x$ также входит в область определения и выполняется условие $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $f(x)$ является нечетной, если для любого положительного x из ее области определения значение $-x$ также входит в область определения и выполняется условие $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

1.2. Задачи

1. Дана функция $f(x)=4x-5$. Найдите $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$.
2. Дана функция $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$. Найти $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(2x)$.
3. Дана функция $f(x)=x^3\cdot 2^x$. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(-x)$, $f(-3)$.
4. Найти область определения следующих функций:

а) $f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$; б) $f(x)=\frac{x-8}{x^2-7x+12}$; в) $f(x)=\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}+\sqrt[3]{5x+7}$;

г) $f(x)=\log(4-x^2)$; д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$; е) $f(x)=\sin\sqrt{x}$;

ж) $f(x)=\frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$; з) $f(x)=\sin\frac{1}{|x|-2}$; и) $f(x)=\frac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}-7\cos 2x$;

к) $f(x)=x^2+tgx$

5. Найти область значений следующих функций:

а) $f(x)=x^2+4x+1$;

б) $f(x)=3-5\cos x$;

в) $f(x)=2\sin x-7$;

г) $f(x)=4-x^2$

6. Проверить на четность и нечетность функции:

а) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$;

б) $f(x)=x^4-5|x|$;

в) $f(x)=x^5+3x^3-x$;

г) $f(x)=e^x-2e^{-x}$

7. Образовать сложные функции из следующих пар функций:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ и $f(x)=tgx$;

б) $f(x)=e^x$ и $f(x)=\sin x$;

в) $f(x)=\log_2 x$ и $f(x)=x^3-2x$

8. Построить графики функций:

а) $y=x^3$ на отрезке [-2;2] с шагом для аргумента, равным 1/2;

б) $f(x)=\frac{1}{x}$; в) $y=\log_2 x$; г) $y=|x-3|$; д) $y=x^2-2x-3$; е) $y=|x^2-2x-3|$;

ж) $y=\sin x$; з) $y=\sin x+3$; и) $y=2\sin x$; к) $y=\sin 2x$; л) $y=|\sin x|$

2. Теория пределов

2.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Определение: Число b называется **<u>пределом функции</u>** $y = f(x)$ при $x\to a$ (или в точке $x = a$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, то при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Предел записывают: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Предел функции (при условии, что он существует) показывает, куда стремится данная функция, если аргумент x стремится к некоторому значению.

Основные теоремы о пределах

1. Предел алгебраической суммы или разности двух функций равен сумме или разности пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x) \qquad (2.1)$$

2. Предел произведения двух функций есть произведение пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x) \qquad (2.2)$$

3. Постоянный сомножитель выносится за знак предела:

$$\lim_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a}f(x), \qquad (2.3)$$

где C = $const$.

4. Предел отношения двух функций есть отношение пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \text{причем}\ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0 \qquad (2.4)$$

5. Предел функции, возведенной в положительную натуральную степень, есть степень предела этой функции:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=(\lim_{x\to a}f(x))^n \qquad (2.5)$$

6. Предел постоянной величины равен этой же самой постоянной величине:

$$\lim_{x\to a}C=C, \qquad (2.6)$$

где C = $const$.

Замечание. При решении пределов первым шагом является подстановка предельного значения переменной x в функцию. Если в результате подстановки получается определенное конечное или бесконечное значение, то предел считается решенным. Если возникает неопределенность, то ее следует раскрыть или доказать, что предел не существует.

Определения:

Функция y = $f(x)$ называется **<u>бесконечно большой</u>** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\ \infty$.

Бесконечно большие функции в теории пределов обозначают значком «∞».

Функция y = $f(x)$ называется **<u>бесконечно малой</u>** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\ 0$.

Бесконечно малые функции в теории пределов обозначают значком «0».

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых (бесконечно больших) функций есть функция бесконечно малая (бесконечно большая):

$$0+0+0+\ldots+0=0\ \text{ и }\ \infty+\infty+\ldots+\infty=\infty \qquad (2.7)$$

2. Произведение бесконечно малой (большой) функции на константу A есть бесконечно малая (большая) функция:

$$A\times 0 = 0 \text{ и } A\times\infty = \infty \tag{2.8}$$

3. Произведение конечного числа бесконечно малых(больших) функций есть функция бесконечно малая (большая):

$$0\times 0\times 0\times \ldots\times 0 = 0 \text{ и } \infty\times\infty\times \ldots\times\infty = \infty \tag{2.9}$$

4. Целая положительная степень бесконечно малой (большой)функции есть бесконечно малая (большая) функция:

$$(0)^n = 0 \text{ и } (\infty)^n = \infty \tag{2.10}$$

5. Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция обратно пропорциональны:

$$\frac{1}{\infty} = 0 \text{ или } \frac{1}{0} = \infty \tag{2.11}$$

Раскрытие неопределенностей:

Для раскрытия неопределенности вида «$\frac{0}{0}$» числитель и знаменатель функции необходимо разложить на множители, а затем общие множители сократить и вычислить предел.

Для раскрытия неопределенности вида «$\frac{\infty}{\infty}$» числитель и знаменатель функции необходимо разделить на переменную в наивысшей степени, входящей в эту функцию, выполнить сокращение, где это возможно, а затем, воспользовавшись свойствами бесконечно больших и малых функций, вычислить предел.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{2.12}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \tag{2.13}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2.14}$$

2.2. Задачи

1. Найти следующие пределы:

а)$\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^2-6x+3\right)$; б)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-5x+1}{4x^2+5}$; в)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2-5x+4\right)$; г)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x+1}{2x^2-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{6}{x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{6}{x-3}$; ж)$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt[3]{x+60}}{2x^2-5x-8}$;

з)$\lim\limits_{t\to 3}\left(2t\sqrt{t^2-8}+\lg\left(3t+\sqrt{t^2-8}\right)-\frac{\sqrt[3]{t^2-1}+\sqrt[4]{t^3-2t^2+7}}{t^3-2t^2+t-11}\right)$

2. Найти пределы, раскрыв соответствующую неопределенность:

2.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+2x+9}{2x^2-x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^2+1}{x^4+5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2-3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+9}{-3x^2+x+7}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+7x^2+1}{-5x^5+5}$;

2.2. а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2-x}{7x^3+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-18x+27}{x^2-9}$;

д) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^4-3x^2}{3x^3+5x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$;

и) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-36}{x^2-7x+6}$; к) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x^2+x-2}$

3. Найти пределы, используя 1-й и 2-й замечательные пределы:

3.1. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin(x)}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos^2(x)}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg(2x)}{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin^2(x)}{7x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin(x)}{-3x}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x)}{2x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg(x)}{x}$; и) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{5x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin^2(x)}{x^2}$;

3.2. а) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{2/x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{4x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x/2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{1/2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/2x}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{2/x}$

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+5}{\sqrt[3]{27x^3+6x^2+8}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\cos bx}$

3. Производная функции

3.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Производной функцией для функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к 0, т.е.

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (3.1)$$

Производная функция имеет различные обозначения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \quad (3.2)$$

Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Геометрический смысл производной: производная функция, вычисленная в точке x_0, равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. При этом уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке x_0, записывается по формуле:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (3.3)$$

Механический смысл производной состоит в том, что мгновенная скорость является производной от перемещения:

$$V_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S_t' \quad (3.4)$$

мгновенное ускорение является первой производной от скорости и второй производной от перемещения:

$$a_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V_t' \quad (3.5)$$

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной величины C равна нулю:

$$(C)' = 0 \quad (3.6)$$

2. Постоянный сомножитель можно вынести за знак производной

$$(C \cdot U)' = C \cdot (U)' \quad (3.7)$$

3. Производная суммы или разности двух функций равна сумме или разности производных от этих функций (справедливо для любого числа функций):

$$(U \pm V)' = U' \pm V' \quad (3.8)$$

4. Производная произведения двух функций

$$(UV)' = U' \cdot V + U \cdot V' \quad (3.9)$$

5. Производная частного двух функций

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2} \quad (3.10)$$

Таблица 3.1 - Производные от основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$sin(x)$	$cos(x)$
x^n	nx^{n-1}	$cos(x)$	$-sin(x)$
a^x	$a^x ln(a)$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$log_a x$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$	$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Продолжение таблицы 3.1

f(x)	*f′(x)*	*f(x)*	*f′(x)*
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2 x}$	$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin^2 x}$		

<u>**Производная сложной функции**</u> $y = f(u(x))$ имеет вид:

$$y' = f'(u(x))\cdot u'(x) == f'(u)\cdot u' \qquad (3.11)$$

3.2. Задачи

1. Найти производные следующих функций, используя определение:
а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = x^2 + 2x$.

Найти производные функции:

2. а) $y = x^3 - 2\cos(x)$; б) $y = \dfrac{5\ln(x)}{4x}$; в) $y = \sqrt{2x-5}$
3. а) $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x^2} + \lg(x)$; б) $y = 2^x(x-1)$; в) $y = \cos(3x-1)$
4. а) $y = x^4 - 3\sin(x) + 8$; б) $y = \dfrac{\cos(x)}{4x^2}$; в) $y = e^{2x-1}$
5. а) $y = x^2 - 2^x + 2\ln(x)$; б) $y = e^x(2x+3)$; в) $y = \sin(x^2)$
6. а) $y = x^{1/2} - 5tg(x) - \dfrac{1}{2}$; б) $y = \dfrac{x}{x^2+2}$; в) $y = \sqrt[3]{2x+3}$
7. а) $y = \sqrt[3]{x^4} - 2ctg(x) - 3$; б) $y = \sin(x)tg(x)$; в) $y = 2\sin(2x)$
8. а) $y = x^3 - 3\ln(x) + \cos(x)$; б) $y = \dfrac{x^2+e}{x^2-e}$; в) $y = 3^{3x}$
9. а) $y = x^2 - x + 2e^x$; б) $y = \cos(x)2^x$; в) $y = \cos(3x^3)$
10. а) $y = \dfrac{x}{2} - 2\sqrt{x} - \ln(x)$; б) $y = \dfrac{\lg(x)}{x^2}$; в) $y = \cos(3x^3)$
11. а) $y = 6x^3 - 3\sqrt[4]{x^3} + 2$; б) $y = 3^x(x^2 - x)$; в) $y = \cos(\sqrt{x})$
12. а) $y = \dfrac{1}{4}x^{-4} - 3\sqrt[3]{x^4} + 7$; б) $y = \dfrac{2\cdot 4^x}{x^4+2x}$; в) $y = \ln(3x^{-3})$
13. $y = \left(2x^4 + 4^x\right)^{5\sin x}$
14. Определить скорость тела, движение которого подчинено закону: $S = t^3 + 3t^2$ м, при t = 2 с.
15. Разность потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза световыми волнами, выражается уравнением следующего вида: $\varphi = 2\sin\left(-0{,}00305t^5 + 0{,}056t^2 + 0{,}159t\right)$. Определить скорость изменения потенциала в начальный момент времени.

16. Зависимость между количеством вещества x, получаемого в некоторой химической реакции, ко времени t выражается уравнением вида: $x = A \cdot \left(1 + e^{-k \cdot t}\right)$. Определить скорость реакции в момент времени t.

17. Смещение в ответ на мышечное раздражение описывается уравнением: $y = t \cdot e^{-t^2/2}$, (t>0). Найти скорость сокращения мышцы в момент времени t.

18. При сокращении мышцы на x см затрачивается энергия, выражаемая соотношением: $E = A + Px + ax^2$, где A, P, a - постоянные. Определить мощность, развиваемую мышцей при сокращении, в момент времени t = 2 с.

4. Приложение производной

4.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Правило Лопиталя-Бернулли: Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций *f(x)*и *g(x)* равен пределу отношения их производных, если последний существует. То есть

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (4.1)$$

Достаточные признаки убывания и возрастания функции:

Если производная первого порядка заданной функции на интервале (a;b) положительна, то функция возрастает на всем этом интервале.

Если производная первого порядка заданной функции на интервале (a;b) отрицательна, то функция убывает на всем этом интервале.

Достаточные признаки существования экстремумов функции:

Пусть в некоторой точке x_0 производная функции равна нулю или не существует. Тогда:

Если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «+» на «-», то в точке x_0функция достигает локального максимума.

Если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «-» на «+», то в точке x_0функция достигает локального минимума.

Если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции не меняет знак, то в точке x_0экстремума не существует.

Достаточные признаки выпуклости и вогнутости:

Если производная функции второго порядка на некотором интервале (a;b) положительна, то график самой функции вогнут вниз на этом интервале.

Если производная функции второго порядка на некотором интервале (a;b) отрицательна, то график самой функции выпуклый вверх на этом интервале.

Достаточный признак точки перегиба:

Если при переходе через критическую точку 2-го рода производная функции 2-го порядка меняет знак, то данная точка является точкой перегиба.

Дифференциал функции – это произведение производной функции на приращение аргумента

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{4.2}$$

Формула приближенных вычислений:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{4.3}$$

4.2. Задачи

1.Вычислить пределы, используя правило Лопиталя-Бернулли:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln(x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-3x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$.

2. Исследовать на монотонность и экстремумы функции:

а) $y = x^3 - 27x + 5$; б) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; в) $y = x\ln x$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке:

а) $y = e^{1-x}(x+2)$, [-2;2]; б) $y = e^x x$, [-1;1]; в) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ [-3;1];

г) $y = e^{-x}(3-x), [0;5]$; д) $y = x\ln x, [\frac{1}{e^2};1]$

4. Исследовать функцию на выпуклость – вогнутость и точки перегиба:

а) $y = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$; б) $y = e^{-x^2}$; в) $y = \cos x + 2$

5. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = x^3 - 4x^2 + 3x$; б) $y = \dfrac{3x-2}{5x^2}$; в) $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

6. Найти дифференциал функции: а) $y = arctg\sqrt{x}$; б) $y = \left(x^3 - x\right)tgx$; в) $y = x^2\ln x$.

7. Найти дифференциал функции: $y = x^2 - 3x + 1$ в точке x=2, если $\Delta x = 0{,}1$.

8. Вычислить приближенно: а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt[3]{26}$; в) $\left(1{,}02\right)^5$; г) $\ln 1{,}03$.

5. Неопределенный интеграл

5.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Определение: Дифференцируемая функция *F(x)* называется **первообразной функцией** по отношению к функции *f(x)* на некотором интервале, если на всем этом интервале *F′(x) = f(x)*.

Определение: Общее выражение *F(x) + C* множества всех первообразных функций для данной функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от *f(x)* и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{5.1}$$

где ∫–знак интеграла;
f(x) – подынтегральная функция;
dx – дифференциал от переменной *x*;
x – переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла:

1. Знаки дифференциала и интеграла, поставленные рядом, взаимно уничтожаются:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx \tag{5.2}$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \tag{5.3}$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int df(x) = f(x) + C \tag{5.4}$$

4. Постоянный множитель A можно выносить за знак интеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \tag{5.5}$$

5. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные. Тогда функция $f_1(x)+ f_2(x)$ также имеет первообразную, при этом:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{5.6}$$

Список простейших интегралов:

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = Ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0$

13. $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = arctg\frac{x}{a} + C$, где $a \neq 0$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a > 0$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

Существует три основных метода интегрирования:

1. **Непосредственное интегрирование**– интегрирование идет с использованием свойств неопределенных интегралов и таблицы простейших интегралов.

2. **Метод замены переменной (подстановки)**– способ, при котором выражение от одной переменной обозначают через другую переменную (при этом меняется переменная интегрирования и дифференциал интегрируемой переменной).

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \qquad (5.7)$$

где $t = \varphi(x)$.

3. **Интегрирование по частям**. Пусть $U = U(x)$, $V = V(x)$– непрерывные и дифференцируемые функции, тогда

$$\int UdV = UV - \int VdU \qquad (5.8)$$

5.2. Задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. Непосредственное интегрирование:

а) $\int\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)dx$; б) $\int(\cos(x) - 2\sin(x))dx$; в) $\int\left(3x^2 - \frac{2}{3}\right)dx$; г) $\int\left(e^x - 2^x + 1\right)dx$;

д) $\int\left(4x^3 - 5\sqrt[3]{x^2} + 1\right)dx$; е) $\int\left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5\right)dx$

2. Интегрирование заменой переменной:

а) $\int x\sqrt[3]{x^2-1}dx$; б) $\int\cos(x-1)dx$; в) $\int\cos(x)\sqrt{\sin(x)}dx$; г) $\int\frac{xdx}{4x^2+1}$; д) $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$

3. Интегрирование по частям:

а) $\int x\cdot\sin(x)dx$; б) $\int x\cdot\cos(x)dx$; в) $\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx$; г) $\int 2^x\sqrt{2^x}dx$; д) $\int \arccos xdx$;

е) $\int x^2\sin 2xdx$; ж) $\int x\cdot \text{arcctg}xdx$

6. Определенный интеграл и его приложение

6.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Определение: Предел интегральной суммы функции$f(x)$, составленной на интервале $[a; b]$ при $\Delta x \to 0$, называется **определенным интегралом**:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{6.1}$$

Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель A можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \tag{6.2}$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \tag{6.3}$$

3. Определенный интеграл с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{6.4}$$

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{6.5}$$

5. Если число $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6.6}$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{6.7}$$

Существует три основных метода интегрирования:

1. **Непосредственное интегрирование** – интегрирование идет с использованием свойств определенных интегралов и таблицы простейших интегралов.
2. **Метод замены переменной (подстановки)** – способ, при котором выражение от одной переменной обозначают через другую переменную (при этом меняется переменная интегрирования и дифференциал интегрируемой переменной).

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt, \qquad (6.8)$$

где $t=\varphi(x)$ – новая переменная;

$\alpha=\varphi(a)$ и $\beta=\varphi(b)$ – новые пределы интегрирования.

3. **Интегрирование по частям**. Пусть $U=U(x)$, $V=V(x)$ - непрерывные и дифференцируемые функции, тогда

$$\int_a^b UdV=UV\Big|_a^b-\int_a^b VdU \qquad (6.9)$$

Площадь плоской фигуры:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (6.10)$$

$$S=\int_a^b \left(f(x)-\varphi(x)\right)dx \qquad (6.11)$$

Объем тела вращения:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx \qquad (6.12)$$

$$V=\pi\int_a^b x^2dy \qquad (6.13)$$

6.2. Задачи

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{-1}^{1}(10x^3-9x+12)dx$; б) $\int_0^2(3x^2-x+2)dx$; в) $\int_2^4\left(x^3+x\right)dx$; г) $\int_4^9\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{5xdx}{\left(1-x^2\right)^3}$; е) $\int_0^\pi x\sin x\,dx$

2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y-x^2=0$; $x-y+2=0$ и осью OX.

3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $x^2-4x+y=0$ и осью OX.

4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y^2-x+1=0$ и x-5=0.

5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y-x^2-6x+5=0$ и осью OX.

6. Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси ОХ, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$; $x = 0$; $x = 4$ и осью ОХ.
7. Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси ОУ, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$; $y = 2$; $y = 4$ и осью ОУ.

7. Дифференциальные уравнения

7.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные различных порядков

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (7.1)$$

Определение: Решением дифференциального уравнения называется функция y = φ(x, C_1, C_2,...,C_n), которая при подстановке в уравнение вместе со своими производными обращает его в тождество.

Решение в неявном виде называется общим интегралом и имеет вид:

$$\Phi = \left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0 \qquad (7.2)$$

Определение: Частным решением называют решение, получаемое из общего при фиксировании постоянных

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right) \quad \text{или} \quad \Phi = \left(x, y, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right) = 0 \qquad (7.3)$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определение: Дифференциальным уравнением 1-го порядка с разделенными переменными называется уравнение вида:

$$f(x)dx \pm \varphi(y)dy = 0 \qquad (7.4)$$

Решение находят непосредственным интегрированием, т.е.

$$\int f(x)dx \pm \int \varphi(y)dy = C \qquad (7.5)$$

Определение: Дифференциальным уравнением 1-го порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx \pm f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (7.6)$$

Приводим к виду с разделенными переменными (разделив обе части уравнения на произведение $f_2(x) \cdot \varphi_1(y) \neq 0$)

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \qquad (7.7)$$

Решаем его непосредственным интегрированием, т.е.

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \qquad (7.8)$$

Задача Коши: Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$. Другими словами: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка, имеют вид:

$$y'' = f(x); \quad y'' = f(y); \quad y'' = f(y'); \quad y'' = f(x, y') \tag{7.9}$$

Решение находят путем понижения порядка с помощью подстановки $y' = P$, где $P = P(x)$ - некоторая функция аргумента *x*.

7.2. Задачи

1. Найти общее решение дифференциального уравнения и решение задачи Коши:

а) $\frac{x}{2} - \frac{dy}{dx} = 0$,y=1 при x=3;

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$, y=2при x=1;

в) $(y-4)dx - (x+1)dy = 0$,y=10 при x=1;

г) $(x-2)dy - (y+3)dx = 0$,y=-1 при x=3;

д) $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y-5} = 0$,y=8 при x=4;

е) $\frac{x-2}{y} + \frac{dy}{dx} = 0$,y=-3 при x=6;

ж) $2xdx + ydy = 0$,y=4 при x=-1;

з) $xdx + 4ydy = 0$,y=1 при x=0;

и) $(y+2)dx + xdy = 0$,y=2 при x=1;

к) $ydx + (x-3)dy = 0$,y=-6 при x=2

2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

а) $y'' = \frac{x^2}{2} + 1$; б) $y'' = 2x - 1$; в) $y'' = x^2 - \cos x$; г) $y'' = -y$; д) $y' \cdot y'' = 1$

3. Показать, что функция $y = (x + C)e^x$ является решением ДУ: $y' - y = e^x$.

4. Показать, что функция $y = -\frac{2}{x^2}$ является решением ДУ: $xy^2dx - dy = 0$.

5. Составить дифференциальное уравнение: а) процесса изменения температуры тела в среде с температурой t_0, если скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и среды; б) процесса изменения численности населения страны, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его численности.

6. Определить численность популяции животных через 20 лет, считая, что скорость прироста пропорциональна его наличному количеству и зная, что в 2022 году численность популяции 145000 особей, а прирост за 2022 год был равен 3 %.
7. Известно, что тело охлаждается в течение 15 минут от 100^0 до 80^0. Через сколько минут температура тела достигнет 40^0, если скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и среды. Температура окружающей среды равна 10^0.

II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8. Основные понятия теории вероятностей

8.1. Основные теоремы, свойства и формулы
Элементы комбинаторики

Размещениями из n элементов по k называют соединения, которые можно образовать из n элементов, собирая в каждое соединение по k элементов, при этом соединения могут отличаться друг от друга как самими элементами, так и порядком их расположения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{8.1}$$

Перестановками из n элементов называют соединения, каждое из которых содержит все n элементов, отличающиеся поэтому друг от друга только порядком расположения элементов. Фактически перестановки из n элементов – это размещения из n элементов по n.

$$P_n = n!, \tag{8.2}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ – факториал числа n

Сочетаниями из n элементов по k называют соединения, которые можно образовать из n элементов, собирая в каждое соединение по k элементов, при этом соединения отличаются друг от друга только самими элементами (порядок из расположения не учитывается).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8.3}$$

Основные определения и понятия теории вероятностей

Испытание – это комплекс условий, при которых осуществляется наблюдение.

Событие – это качественный результат испытания.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Случайным называется событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий может произойти либо не произойти.

Элементарные события – это возможные, исключающие друг друга результаты одного испытания.

Противоположные события – это два единственно возможных элементарных события. Как правило, противоположные события обозначают A и $\bar{A}$.

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого.

События называют **равновозможными**, если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называют **благоприятствующими** этому событию.

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{8.4}$$

где m– число испытаний, в которых событие A появилось;
n– общее число проведенных испытаний.

Математической вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{8.5}$$

где m– число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A;
n– общее число всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Сумма событий. Теоремы сложения

Суммой двух событий A и B называют событие A+B, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B) \tag{8.6}$$

Следствия.

1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+ ... +A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{8.7}$$

2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = 1 \quad (8.8)$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A}) = 1 \quad (8.9)$$

Произведение событий. Теоремы умножения.

Произведением двух событий A и B называют событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема 2. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, считая, что первое уже произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (8.10)$$

Теорема 3. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (8.11)$$

Следствие. Вероятность совместного появления несовместных событий, попарно независимых, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (8.12)$$

Теорема 4. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(A \cdot B) \quad (8.13)$$

Вероятность события A, которое может наступить в результате появления одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, вычисляется по **формуле полной вероятности:**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \quad (8.14)$$

Вероятность гипотезы H_k при условии, что событие A произошло, можно вычислить по **формуле Байеса**:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad (8.15)$$

8.2. Задачи

1. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10 кандидатов?
2. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из 10 кандидатов?

3. В цветочном киоске 7 видов цветов. Сколькими способами можно составить букет, содержащий 3 цветка?
4. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 12 гвоздик, 15 роз и 7 хризантем?
5. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей; 3 гостя?
6. Среди 500 ампул, проверенных на герметичность, оказалось 10 ампул с трещинами. Определить относительную частоту появления ампул, имеющих трещины.
8. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 100 штук семян. 95 семян взошло. Какова частота всхожести семян?
9. Среди тысячи новорожденных оказалось 517 мальчиков. Найти относительную частоту рождения мальчиков.
10. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель равна 0,85. Определить число попаданий, если произведено 120 выстрелов.
11. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу выбирают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый.
12. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, денежного или вещевого, для владельца одного билета?
13. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 и менее очков -0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
14. На лекции по физике присутствуют 100 студентов первого курса. Из них по математике имеют отметку «отлично» 20 человек, «хорошо» – 50, «удовлетворительно» – 24 и «неудовлетворительно» – 6. Какова вероятность того, что вызванный наугад студент из числа присутствующих на лекции не имеет задолженности по математике?
15. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p=0,9$. Стрелок произвел три выстрела. Найти вероятность того, что все три выстрела дали попадание.
16. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из нее подряд извлекают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые, если шары обратно не возвращаются и при первом извлечении появился белый шар.
17. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только один студент; в) хотя бы один студент.
18. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок потребует внимания рабочего, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за смену: а) все три станка потребуют внимания; б) хотя бы один станок потребует внимания; в) только один станок потребует внимания.

19. Медицинская сестра обслуживает в палате четырех больных. Вероятность того, что в течении часа внимания сестры потребует первый больной, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,21, четвертый – 0,1. Найти вероятность того, что в течении часа потребуют внимания: а) все четверо потребуют внимания; б) хотя бы один больной потребует внимания; в) ни один больной не потребует внимания.

20. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0.015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

21. Известно, что в партии из 1000 стандартных ампул с новокаином 400 ампул изготовлено на одном заводе, 350 – на втором и 250 – на третьем. Известны также вероятности 0,75; 0,80; 0,85 того, что ампула окажется без дефекта при изготовлении ее соответственно на первом, втором и третьем заводах. Какова вероятность того, что наугад выбранная из данной партии ампула окажется без дефекта?

22. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

9. Повторные независимые испытания

9.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A имеет одну и ту же вероятность p, не зависящую от номера испытания. Очевидно, что вероятность не наступления события A в каждом испытании равна $q = 1 - p$.

Вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз, вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \qquad (9.1)$$

где $P_{k,n}$ – вероятность того, что при nповторных независимых испытаний событие A произойдет ровно kраз;

p – вероятность появления события A в отдельном испытании;

$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в отдельном испытании.

Замечание. Формула Бернулли используется при небольших количествах повторных испытаний, обычно при n не более 20.

Наивероятнейшее число появления события

Число m_0 называют наивероятнейшим, если в серии из n испытаний вероятность того, что событие наступит m_0 раз, превышает вероятность остальных возможных исходов испытаний.

$$np - q \le m_0 \le np + p \tag{9.2}$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз, равна:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{9.3}$$

где p – вероятность появления события A в отдельном испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в отдельном испытании.

Функция $\varphi(x)$ называется локальной функцией Лапласа, а ее значение определяется по таблице 1, при этом $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Переменная x находится по формуле:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \tag{9.4}$$

Замечание. Локальная теорема Муавра-Лапласа используется при больших количествах повторных испытаний.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз и не более $k2$ раз, равна:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \tag{9.5}$$

Функция $\Phi(x)$ называется интегральной функцией Лапласа, а ее значение определяется по таблице 2, при этом $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Переменные x_1 иx_2 находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \tag{9.6}$$

9.2. Задачи

1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех; в) четыре.
2. В семье четверо детей. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три; б) не менее трех; в) два.
3. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди 6 заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не менее пяти; б) не более пяти; в) две.
4. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными

окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух.
5. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.
6. Вероятность работы каждого из семи моторов в данный момент равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) хотя бы один мотор; б) два мотора; в) три мотора.
7. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров.
8. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз.
9. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) не более пяти студентов.
10. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях.
11. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 144 испытаниях событие наступит 120 раз.
12. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 1470 раз и не более 1500 раз.
13. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных.
14. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2.
15. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найти вероятность наличия в партии из 200 клемм от 70 до 80 клемм, не соответствующих стандарту.
16. Вероятность появления события в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 1500 раз.
17. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 11 раз.
18. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет на шести веретенах.

10. Случайные величины

10.1. Основные теоремы, свойства и формулы

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Случайная величина называется **дискретной**, если все ее возможные значения изолированы друг от друга и их можно пронумеровать.

Случайную величину называют **непрерывной**, если все ее возможные значения заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Законом распределения случайной величины называется соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Такой закон можно задать таблично, аналитически и графически. Непрерывную случайную величину, как правило, задают аналитически или графически. Дискретная непрерывная величина задается таблично. При этом первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая – соответствующие вероятности:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

При этом выполняется условие: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяющая вероятность того, что случайная величина примет значение меньше x.

$$F(x) = P(X < x) \qquad (10.1)$$

Плотностью распределения вероятностей случайной величины называется производная от функции распределения случайной величины:

$$p(x) = F'(x) \qquad (10.2)$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n \qquad (10.3)$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \qquad (10.4)$$

На практике пользуются формулой:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \qquad (10.5)$$

где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \ldots + x_n^2 p_n$.

Корень квадратный из дисперсии случайной величины называется **средним квадратическим отклонением** случайной величины и обозначается $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \qquad (10.6)$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Под **математическим ожиданием** непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат интервалу $(a;\ b)$, понимается число:

$$M(X)=\int_a^b xp(x)dx \qquad (10.7)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат интервалу $(a;\ b)$, определяется равенством:

$$D(X)=\int_a^b \left(x-M(X)\right)^2 p(x)dx,\ \text{или}\ D(X)=\int_a^b x^2 p(x)dx-\left(M(X)\right)^2 \qquad (10.8)$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D(X)} \qquad (10.9)$$

Нормальное распределение случайной величины

Случайная величина X имеет **нормальный закон распределения**, если ее функция плотности распределения вероятности имеет вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (10.10)$$

где a – математическое ожидание случайной величины;

σ– среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения, попадет в интервал $(x_1;x_2)$, находится по формуле:

$$P(x_1<X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) \qquad (10.11)$$

Понятие о законе больших чисел

Теория вероятностей обобщает реальные свойства случайных явлений и величин. Важным в процессе обобщения является выражение объективно существующих закономерностей в виде закона больших чисел.

Говорят, что последовательность случайных величин X_1, X_2, X_3,…, X_n, имеющих математические ожидания $M(X_1)$, $M(X_2)$, $M(X_3)$,…, $M(X_n)$, подчиняется **закону больших чисел**, если среднее арифметическое этих случайных величин $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ при $n\to\infty$ с вероятностью, неограниченно приближающейся к 1, сколько угодно мало (меньше чем на $\varepsilon>0$) отличается от среднего арифметического их математических ожиданий $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)$, то есть при $n\to\infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\to 1 \qquad (10.12)$$

10.2. Задачи

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$:

а)

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

б)

X	3	6	7	8	9
P	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

в)

X	-2	-1	3	4	5
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

г)

X	-3	-2	0	1	2
P	0,11	0,19	0,23	0,35	0,22

В задачах 2-13 найти закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ)X. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$:

2. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин. подает красный и зеленый сигналы; СВ X–число остановок автомобиля на этой улице.

3. Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым –0,5, третьим – 0,6; СВ X–число поражений мишени.

4. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8; СВ X–число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

5. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6; СВ X–число поражений цели при четырех выстрелах.

6. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии – 3 прибора; СВ X–число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

7. Вероятность перевыполнения плана для СУ–1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ–3 – 0,7; СВ X– число СУ, перевыполнивших план.

8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8; СВ X– число попаданий в цель при трех выстрелах.
9. Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 мин. равна 0,4; СВ X– число вызовов, поступивших на АТС за 4 мин.
10. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8; СВ X– число студентов, сдавших экзамен.
11. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего –0,7; СВ X–число сданных экзаменов.
12. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом и 1/3 вторым сортом; СВ X–число изделий первого сорта из взятых наугад четырех.
13. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется четыре нестандартных, для проверки качества выбраны случайным образом 3 изделия; СВ X–число нестандартных изделий среди проверяемых.
14. Задана функция распределения случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \text{при} \ x<3\\ C(x-3)^2, \ \text{при} \ 3\le x\le 5\\ 1, \ \text{при} \ x>5\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент С; б) плотность распределения вероятностейf(x) и построить их графики; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины; г) вероятность, что значение случайной величины принадлежит отрезку [3; 4].
15. Задана функция распределения случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \text{при} \ x<1\\ a(x-1)^3, \ \text{при} \ 1\le x\le 3\\ 1, \ \text{при} \ x>3\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) плотность распределения вероятностейf(x) и построить их графики; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины; г) вероятность, что значение случайной величины принадлежит отрезку [2; 3].
16. Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и средним квадратическим отклонением 10. Найти вероятность попадания значений данной случайной величины в отрезок [10; 50].
17. Случайная величина Y распределена по нормальному закону распределения с математическим ожиданием 122 и средним квадратическим отклонением 13. Найти вероятность попадания значений данной случайной величины в отрезок [100; 145].

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1 – Значения локальной функции Лапласа

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица 2 – Значения интегральной функции Лапласа

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,00000	0,40	0,15542	0,79	0,28524	1,18	0,38100	1,57	0,44179
0,01	0,00399	0,41	0,15910	0,80	0,28814	1,19	0,38298	1,58	0,44295
0,02	0,00798	0,42	0,16276	0,81	0,29103	1,20	0,38493	1,59	0,44408
0,03	0,01197	0,43	0,16640	0,82	0,29389	1,21	0,38686	1,60	0,44520
0,04	0,01595	0,44	0,17003	0,83	0,29673	1,22	0,38877	1,61	0,44630
0,05	0,01994	0,45	0,17364	0,84	0,29955	1,23	0,39065	1,62	0,44738
0,06	0,02392	0,46	0,17724	0,85	0,30234	1,24	0,39251	1,63	0,44845
0,07	0,02790	0,47	0,18082	0,86	0,30511	1,25	0,39435	1,64	0,44950
0,08	0,03188	0,48	0,18439	0,87	0,30785	1,26	0,39617	1,65	0,45053
0,09	0,03586	0,49	0,18793	0,88	0,31057	1,27	0,39796	1,66	0,45154
0,10	0,03983	0,50	0,19146	0,89	0,31327	1,28	0,39973	1,67	0,45254
0,11	0,04380	0,51	0,19497	0,90	0,31594	1,29	0,40147	1,68	0,45352
0,12	0,04776	0,52	0,19847	0,91	0,31859	1,30	0,40320	1,69	0,45449
0,13	0,05172	0,53	0,20194	0,92	0,32121	1,31	0,40490	1,70	0,45543
0,14	0,05567	0,54	0,20540	0,93	0,32381	1,32	0,40658	1,71	0,45637
0,15	0,05962	0,55	0,20884	0,94	0,32639	1,33	0,40824	1,72	0,45728
0,16	0,06356	0,56	0,21226	0,95	0,32894	1,34	0,40988	1,73	0,45818
0,17	0,06749	0,57	0,21566	0,96	0,33147	1,35	0,41149	1,74	0,45907
0,18	0,07142	0,58	0,21904	0,97	0,33398	1,36	0,41309	1,75	0,45994
0,19	0,07535	0,59	0,22240	0,98	0,33646	1,37	0,41466	1,76	0,46080
0,20	0,07926	0,60	0,22575	0,99	0,33891	1,38	0,41621	1,77	0,46164
0,21	0,08317	0,61	0,22907	1,00	0,34134	1,39	0,41774	1,78	0,46246
0,22	0,08706	0,62	0,23237	1,01	0,34375	1,40	0,41924	1,79	0,46327
0,23	0,09095	0,63	0,23565	1,02	0,34614	1,41	0,42073	1,80	0,46407
0,24	0,09483	0,64	0,23891	1,03	0,34849	1,42	0,42220	1,81	0,46485
0,25	0,09871	0,65	0,24215	1,04	0,35083	1,43	0,42364	1,82	0,46562
0,26	0,10257	0,66	0,24537	1,05	0,35314	1,44	0,42507	1,83	0,46638
0,27	0,10642	0,67	0,24857	1,06	0,35543	1,45	0,42647	1,84	0,46712
0,28	0,11026	0,68	0,25175	1,07	0,35769	1,46	0,42785	1,85	0,46784
0,29	0,11409	0,69	0,25490	1,08	0,35993	1,47	0,42922	1,86	0,46856
0,30	0,11791	0,70	0,25804	1,09	0,36214	1,48	0,43056	1,87	0,46926
0,31	0,12172	0,71	0,26115	1,10	0,36433	1,49	0,43189	1,88	0,46995
0,32	0,12552	0,72	0,26424	1,11	0,36650	1,50	0,43319	1,89	0,47062
0,33	0,12930	0,73	0,26730	1,12	0,36864	1,51	0,43448	1,90	0,47128
0,34	0,13307	0,74	0,27035	1,13	0,37076	1,52	0,43574	1,91	0,47193
0,35	0,13683	0,75	0,27337	1,14	0,37286	1,53	0,43699	1,92	0,47257
0,36	0,14058	0,76	0,27637	1,15	0,37493	1,54	0,43822	1,93	0,47320
0,37	0,14431	0,77	0,27935	1,16	0,37698	1,55	0,43943	1,94	0,47381
0,38	0,14803	0,78	0,28230	1,17	0,37900	1,56	0,44062	1,95	0,47441

Продолжение таблицы 2

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,96	0,47500	2,32	0,48983	2,72	0,49674	3,30	0,49952	4,30	0,49999
1,97	0,47558	2,34	0,49036	2,74	0,49693	3,35	0,49960	4,35	0,49999
1,98	0,47615	2,36	0,49086	2,76	0,49711	3,40	0,49966	4,40	0,49999
1,99	0,47670	2,38	0,49134	2,78	0,49728	3,45	0,49972	4,45	0,50000
2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744	3,50	0,49977	4,50	0,50000
2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760	3,55	0,49981	4,55	0,50000
2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774	3,60	0,49984	4,60	0,50000
2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788	3,65	0,49987	4,65	0,50000
2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801	3,70	0,49989	4,70	0,50000
2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813	3,75	0,49991	4,75	0,50000
2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825	3,80	0,49993	4,80	0,50000
2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836	3,85	0,49994	4,85	0,50000
2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846	3,90	0,49995	4,90	0,50000
2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856	3,95	0,49996	4,95	0,50000
2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865	4,00	0,49997	5,00	0,50000
2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,05	0,49886	4,05	0,49997		
2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,10	0,49903	4,10	0,49998		
2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,15	0,49918	4,15	0,49998		
2,28	0,48870	2,68	0,49632	3,20	0,49931	4,20	0,49999		
2,30	0,48928	2,70	0,49653	3,25	0,49942	4,25	0,49999		

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Зайцев, И. А. Высшая математика : учебник для студентов не инженерных специальностей сельскохозяйственных вузов / И. А. Зайцев. – Москва : Высшая школа, 1991. – 400 с.
2. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики : учебное пособие для студентов естественных специальностей университетов / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – 6-е изд. – Москва : Наука, 1986. – 575 с.
3. Лобоцкая, Н. Л. Высшая математика : учебник для студентов фармацевтических институтов и фармацевтических факультетов медицинских институтов / Н. Л. Лобоцкая, Ю. В. Морозов, А. А. Дунаев. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 319 с.

Дополнительная

1. Воронов, М. В. Математика для гуманитарных факультетов / М. В. Воронов. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. – 320 с.
2. Виноградов, И. М. Элементы высшей математики / И. М. Виноградов. – Москва : Высшая школа, 1999. – 512 с.
3. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под редакцией Ю. С. Богданова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высшая школа, 1988. – 272 с.
4. Гроссман, С. Математика для биологов / С. Гроссман, Дж. Тернер. – Москва : Высшая школа, 1983. – 290 с.
5. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Наука и техника, 1991. – 480 с.
6. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2002. – 288 с.
7. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2002. – 416 с.
8. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2002. – 301 с.
9. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 8-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 2002. – 480 с.
10. Мацкевич, И. П. Высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск : Высшая школа, 1993. – 272 с.
11. Калинина, В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. – 2-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 1998. – 336 с.

Учебное издание

Толкач Алексей Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания

Ответственный за выпуск А. М. Курилович
Технический редактор Е. А. Алисейко
Компьютерный набор А. Н. Толкач
Компьютерная верстка Т. А. Никитенко
Корректор Е. В. Морозова

Подписано в печать 27.03.2025. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 1,39. Тираж 48 экз. Заказ 2550.

Издатель учреждение образования «Витебская ордена «Знак Почета» государственная академия ветеринарной медицины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/ 362 от 13.06.2014.
Ул. 1-я Доватора, 7/11, 210026, г. Витебск.
Тел.: (0212) 48-17-70.
E-mail: rio@vsavm.by
http://www.vsavm.by

ISBN 978-985-591-221-8

9 789855 912218